Bemerkung zu einem Axiomensystem für die reellen Zahlen von Tarski[*]

Stefanie Ucsnay

In seinem Buch “Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences”[1] gibt Tarski zwei Axiomensysteme für die Arithmetik der reellen Zahlen. Über das erste schreibt er: “... it appears to be the simplest of all known axiom systems that form a sufficient basis upon which to found the entire system of arithmetic”[2]. Er bemerkt ferner, dass alle Axiome dieses Axiomensystems, mit Ausnahme des ersten, das aus den übrigen abgeleitet werden kann, voneinander unabhängig sind. In diesem Artikel soll gezeigt werden, dass Axiom 1 des ersten Axiomensystems $\mathfrak{A}$ tatsächlich aus den anderen abgeleitet werden kann.[3] Tarskis eigener Beweis – seine Ableitung von Axiom 1 aus den übrigen Axiomen – ist unbekannt.

Tarskis Axiomensystem $\mathfrak{A}$, das die vier Grundbegriffe “N”, “$<$”, “$+$” und “1” enthält, besteht aus den folgenden Axiomen[4]:

1. Wenn $x \neq y$, so gilt $x < y$ oder $y < x$.
2. Wenn $x < y$, so $y \not< x$.
3. Ist $x < z$, so gibt es eine Zahl y, für die $x < y$ und $y < z$ gilt.
4. Wenn K und L beliebige Mengen von Zahlen sind (d. h. $K \subset \mathrm{N}$ und $L \subset \mathrm{N}$), die die Bedingung erfüllen, dass für jedes x aus K und jedes y aus L $x < y$ gilt, dann gibt es eine Zahl z, die folgende Bedingung erfüllt: ist x ein beliebiges Element von K und y ein beliebiges Element von L, wobei $x \neq z$ und $y \neq z$, so gilt $x < z$ und $z < y$.

---

[*] Erscheint 2008 auf Englisch unter dem Titel ”A Note on Tarski’s Note” in: American Mathematical Monthly.

[1] Alfred Tarski, *Introduction to Logic and to the Methodology of Deductive Sciences*, Oxford University Press, New York, 1961

[2] Alfred Tarski, a.a.O., S. 216

[3] Auf dieses Problem wurde ich von Prof. Dr. Wilhlem K. Essler aufmerksam gemacht.

[4] Alfred Tarski, a.a.O., S. 214

5. $x + (y + z) = (x + z) + y$.
6. Für beliebige Zahlen x und y gibt es eine Zahl z, so dass $x = y + z$.
7. Wenn $x + z < y + t$, so gilt $x < y$ oder $z < t$.
8. $1 \in \mathrm{N}$.
9. $1 < 1 + 1$.

Tarski lässt in seiner Formulierung des Axiomensystems häufig die Einleitung "Für alle Zahlen x, y, z, t" vor den Axiomen weg.

Zunächst werden aus den Axiomen 2-9 einige Sätze abgeleitet, von denen die meisten so oder so ähnlich auch in Tarskis Buch bewiesen werden.

Satz 1 (Kommutativität). *Für alle $x, y \in \mathrm{N}$ gilt $x + y = y + x$.*

Beweis. $x, y \in \mathrm{N}$ seien gegeben. Dann gibt es (Axiom 6) $z \in \mathrm{N}$, so dass $y = x+z$. Dann gilt mit Axiom 5 $x+y = x+(x+z) = (x+z)+x = y+x$. □

Satz 2 (Assoziativität). *Für alle $x, y, z \in \mathrm{N}$ gilt $x + (y + z) = (x + y) + z$.*

Beweis. $x, y, z \in \mathrm{N}$ seien gegeben. Auf Grund der Kommutativität und nach Axiom 5 gilt $x + (y + z) = x + (z + y) = (x + y) + z$. □

Satz 3 (Existenz eines neutralen Elements). *Es gibt $z \in \mathrm{N}$, so dass für alle $x \in \mathrm{N}$ gilt: $x = x + z$.*

Beweis. Es sei $y \in \mathrm{N}$ (nach Axiom 8 ist N nicht leer). Dann gibt es ein $z \in \mathrm{N}$, so dass $y = y + z$. Sei nun $x \in \mathrm{N}$, dann gibt es ein $w \in \mathrm{N}$, so dass $x = y + w$. Dann gilt mit Kommutativität und Assoziativität: $x + z = (y + w) + z = (w + y) + z = w + (y + z) = w + y = y + w = x$. □

Satz 4 (Eindeutigkeit in Axiom 6). *Für alle $x, y \in \mathrm{N}$ gibt es genau ein $z \in \mathrm{N}$, so dass $x = y + z$.*

Beweis. Seien $x, y \in \mathrm{N}$, dann gibt es $z \in \mathrm{N}$, so dass $x = y + z$. Sei $x = y + z'$ mit $z' \in \mathrm{N}$. $w \in \mathrm{N}$ sei ein neutrales Element und für $r \in \mathrm{N}$ gelte $w = y + r$. Dann erhält man: $z = z + w = z + (y + r) = (z + y) + r = (y + z) + r = (y + z') + r = (z' + y) + r = z' + (y + r) = z' + w = z'$. □

Damit ist insbesondere das neutrale Element eindeutig. 0 sei das neutrale Element. Für alle $x \in \mathrm{N}$ gibt es genau ein inverses Element $z \in \mathrm{N}$, so dass $0 = x + z$. $-x$ sei das inverse Element zu x.

Satz 5 (Abgeschlossenheit unter Addition). *Für alle* $x, y \in \mathrm{N}$ *gilt* $x + y \in \mathrm{N}$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathrm{N}$. Dann gibt es $z \in \mathrm{N}$, so dass $y = (-x) + z$. Damit gilt: $x + y = x + ((-x) + z) = (x + (-x)) + z = 0 + z = z + 0 = z$. Also gilt $x + y \in \mathrm{N}$. □

Satz 6 (Monotonie). *Für alle* $x, y, z \in \mathrm{N}$ *gilt: falls* $y < z$*, dann* $x + y < x + z$.

Beweis. Angenommen $y, z \in \mathrm{N}$ mit $y < z$. Man erhält: $(x + y) + (-x) = (y + x) + (-x) = y + (x + (-x)) = y + 0 = y < z = z + 0 = z + (x + (-x)) = (z + x) + (-x) = (x + z) + (-x)$. Mit Axiom 7 gilt dann: $x + y < x + z$ oder $(-x) < (-x)$. Wegen Axiom 2 ist der zweite Fall ausgeschlossen und man erhält $x + y < x + z$. □

Nun folgt die Ableitung von Axiom 1 aus den Axiomen 2-9.

Hierzu zunächst ein Lemma, das im Beweis verwendet wird:

Lemma 1. *Für alle* $x \in \mathrm{N}$ *gilt* $x < x + 1$.

Beweis. Mit Axiom 9 und der Monotonie gilt $x+1 < x+(1+1) = (x+1)+1$ und damit nach Axiom 7 auch $x < x + 1$, da $1 \not< 1$. □

Satz 7. *Für alle* $x, y \in \mathrm{N}$ *gilt: wenn* $x \neq y$*, dann* $x < y$ *oder* $y < x$.

Beweis. Seien $x, y \in \mathrm{N}$ mit $x \neq y$ and $y \not< x$.

Für alle $w \in \mathrm{N}$ mit $y < w$ gilt auf Grund der Monotonie $x+y < x+w = w+x$ und damit nach Axiom 7 $x < w$ oder $y < x$. Der zweite Fall ist nach Annahme nicht möglich, also gilt $x < w$.

Seien $K = \{x, y\}$ und $L = \{w \in \mathrm{N} | y < w\}$. Für alle $a \in K$ und $b \in L$ gilt $a < b$. Nach Axiom 4 gibt es $z \in \mathrm{N}$, das die folgende Bedingung erfüllt: wenn $a \in K$ und $b \in L$ mit $a \neq z$ und $b \neq z$, dann gilt $a < z$ und $z < b$.

Es gilt $z = y$:
Um dies zu zeigen, sei angenommen, dass $z \neq y$. Nach Lemma 1 gilt $y < y+1$. Es ist also $y \in K$ und $y + 1 \in L$. Ferner gilt $y \neq z$ (nach Annahme) und $y + 1 \neq z$. Denn wäre $y + 1 = z$, würde, da es nach Axiom 3 $w \in \mathrm{N}$ gibt mit $y < w < y + 1$, auch $y < w < z$ gelten. Da $w \in L$, $w \neq z$ (Axiom 2), würde jedoch auch $y < z < w$ gelten, was ein Widerspruch ist. Axiom 4 ist also auf $y \in K$, $y + 1 \in L$ anwendbar, wobei sich $y < z < y + 1$ ergibt. Es gibt jedoch

nach Axiom 3 $w \in \mathrm{N}$ mit $y < w < z$. Man erhält, da $w \in L$ und $w \neq z$, nach Anwendung von Axiom 4 $y < z < w$, was ein Widerspruch zu $y < w < z$ ist. Es folgt, dass $z = y$.

Da $x \in K$, $y + 1 \in L$, $x \neq y$ und $y + 1 \neq y$, gilt nach Axiom 4 $x < y < y + 1$ und man erhält $x < y$.

$\square$